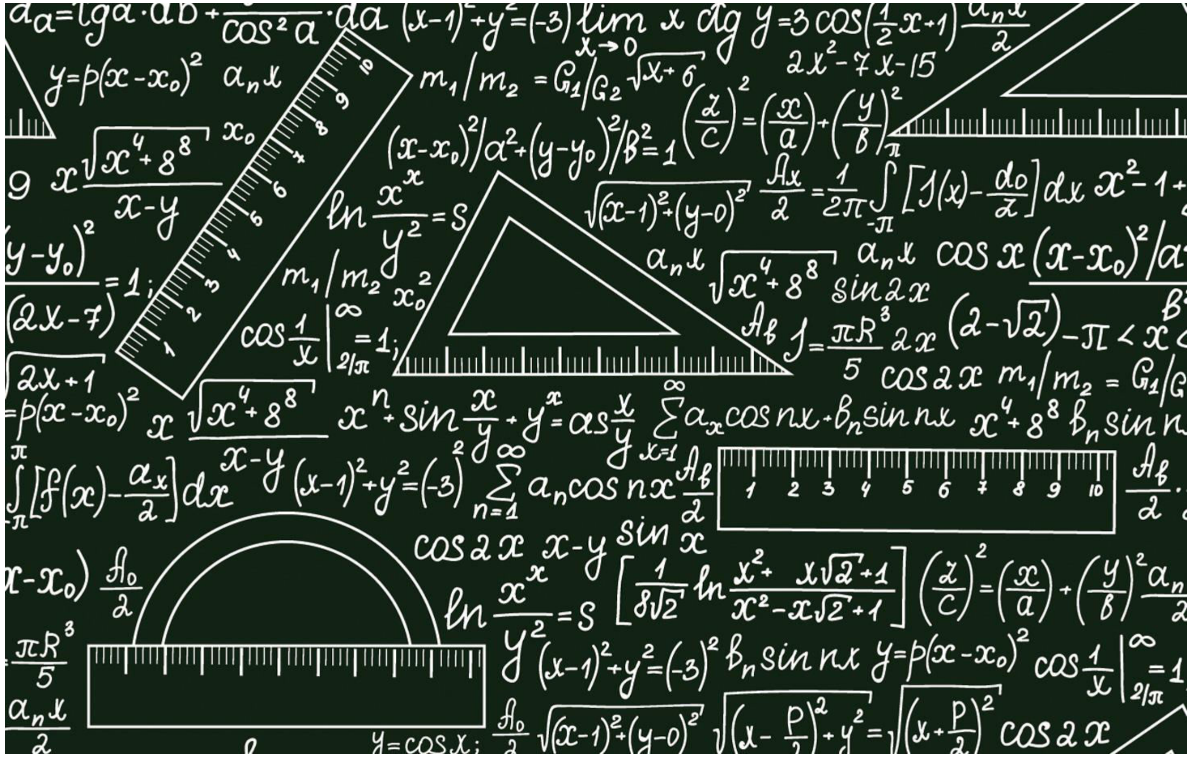
BAB 2 PEMBEZAAN Bahagian 2

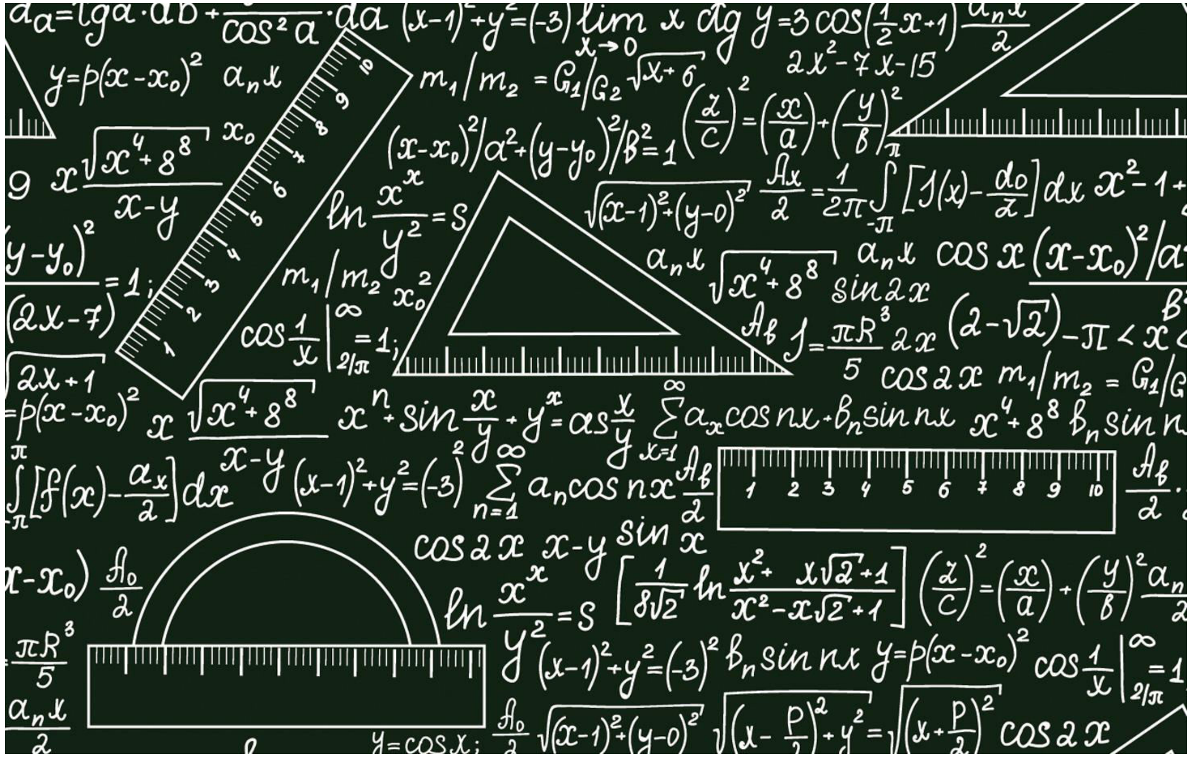
Matematik Tambahan Tingkatan 5 KSSM

Oleh Cikgu Norazila Khalid

Smk Ulu Tiram, Johor



Pembezaan Peringkat Kedua



Terbitan kedua bagi fungsi algebra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ atau } f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)]$$

terbitan kedua

Contoh 11

(a) Cari $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ bagi fungsi $y = x^3 + \frac{4}{x^2}$.

(b) Jika $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 9$, cari $g''\left(\frac{1}{4}\right)$ dan $g''(-1)$.

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{4}{x^2} \\ &= x^3 + 4x^{-2} \\ \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 8x^{-3} \\ \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - \frac{8}{x^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 6x + 24x^{-4} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 6x + \frac{24}{x^4} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 7x - 9 \\ g'(x) &= 6x^2 + 6x - 7 \\ g''(x) &= 12x + 6 \end{aligned}$$

Maka, $g''\left(\frac{1}{4}\right) = 12\left(\frac{1}{4}\right) + 6$
$= 3 + 6$
$= 9$

$$\begin{aligned} g''(-1) &= 12(-1) + 6 \\ &= -12 + 6 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Contoh 12

Diberi fungsi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, cari nilai-nilai x dengan keadaan $f'(x) = f''(x)$.

Penyelesaian

Diberi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.
Jadi, $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ dan $f''(x) = 6x + 4$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f''(x) \\ 3x^2 + 4x + 3 &= 6x + 4 \\ 3x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ (3x + 1)(x - 1) &= 0 \\ x &= -\frac{1}{3} \text{ atau } x = 1 \end{aligned}$$

Maka, nilai-nilai x ialah $-\frac{1}{3}$ dan 1.

Latihan Kendiri 2.6

1. Cari $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ bagi setiap fungsi berikut.

   (a) $y = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$ (b) $y = 4x^2 - \frac{2}{x}$ (c) $y = (3x + 2)^8$

2. Cari $f'(x)$ dan $f''(x)$ bagi setiap fungsi berikut.

   (a) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ (b) $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$ (c) $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}$

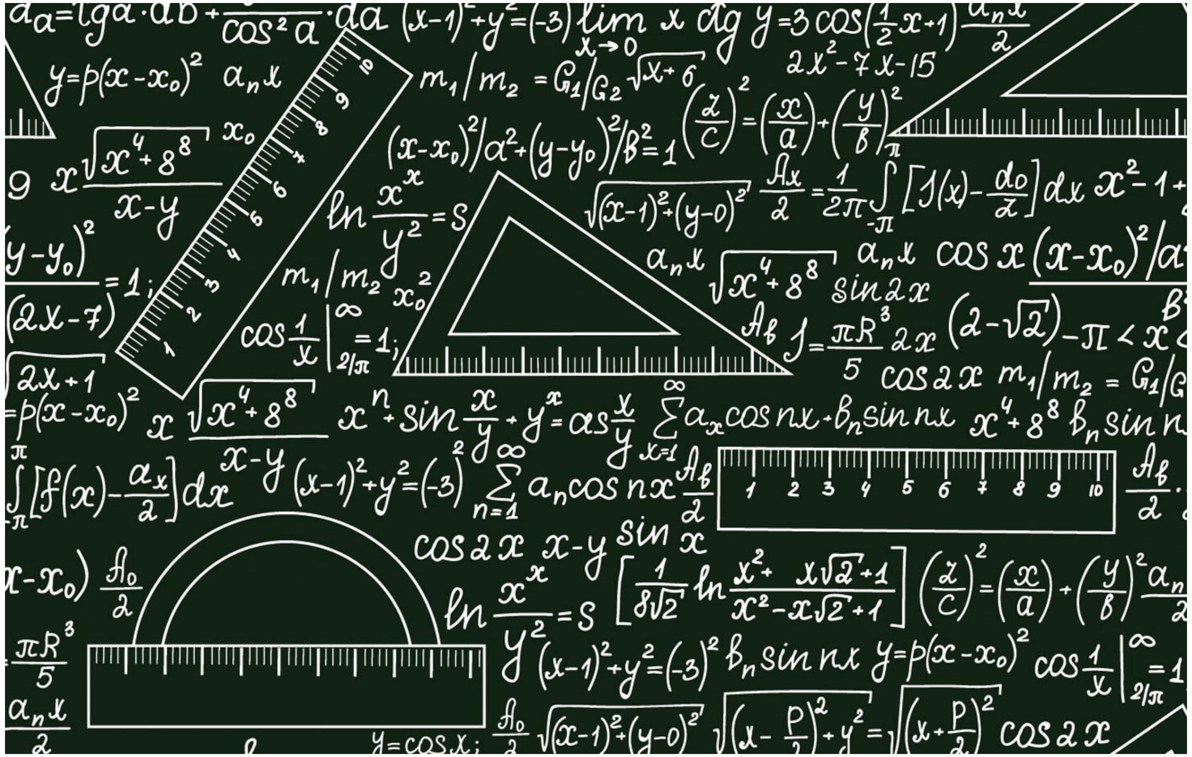
3. Diberi $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$, cari koordinat titik A yang mungkin dengan keadaan $\frac{dy}{dx} = 0$. Seterusnya, cari nilai bagi $\frac{d^2y}{dx^2}$ di titik A itu.

Latihan Formatif 2.3

Kuiz bit.ly/2P9X98B

1. Jika $xy - 2x^2 = 3$, tunjukkan bahawa $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = y$.
2. Cari nilai $f'(1)$ dan $f''(1)$ bagi setiap fungsi berikut.
   (a) $f(x) = 3x - 2x^3$
   (b) $f(x) = x^2(5x - 3)$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2}$
3. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$, cari $f'(3)$ dan $f''(-3)$.
4. Jika $a = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$, cari nilai-nilai t dengan keadaan $\dfrac{da}{dt} = \dfrac{d^2a}{dt^2}$.
5. Diberi fungsi $g(x) = hx^3 - 4x^2 + 5x$. Cari nilai h jika $g''(1) = 4$.
6. Diberi $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 9$, cari
   (a) nilai-nilai x dengan keadaan $f'(x) = 0$,
   (b) $f''(x)$,
   (c) nilai x dengan keadaan $f''(x) = 0$,
   (d) julat nilai x untuk $f''(x) < 0$.

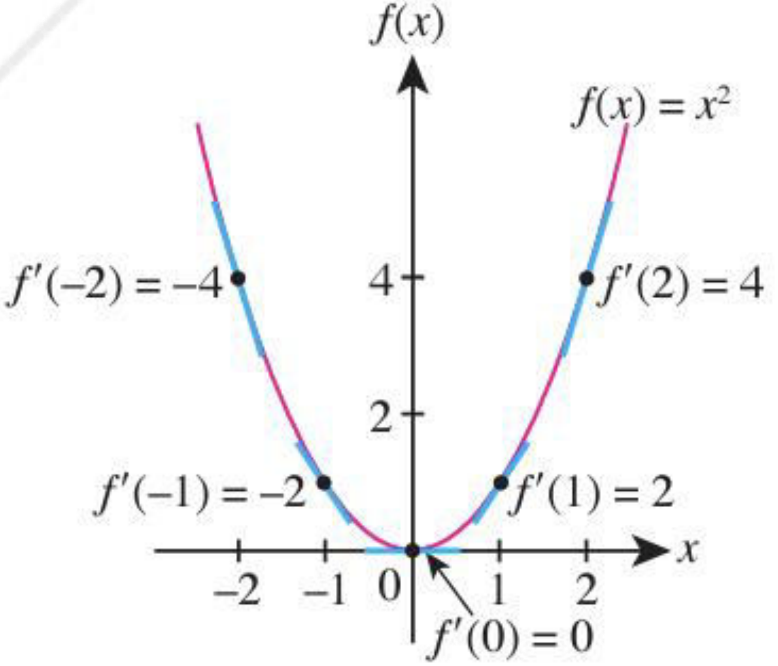
Aplikasi Pembezaan



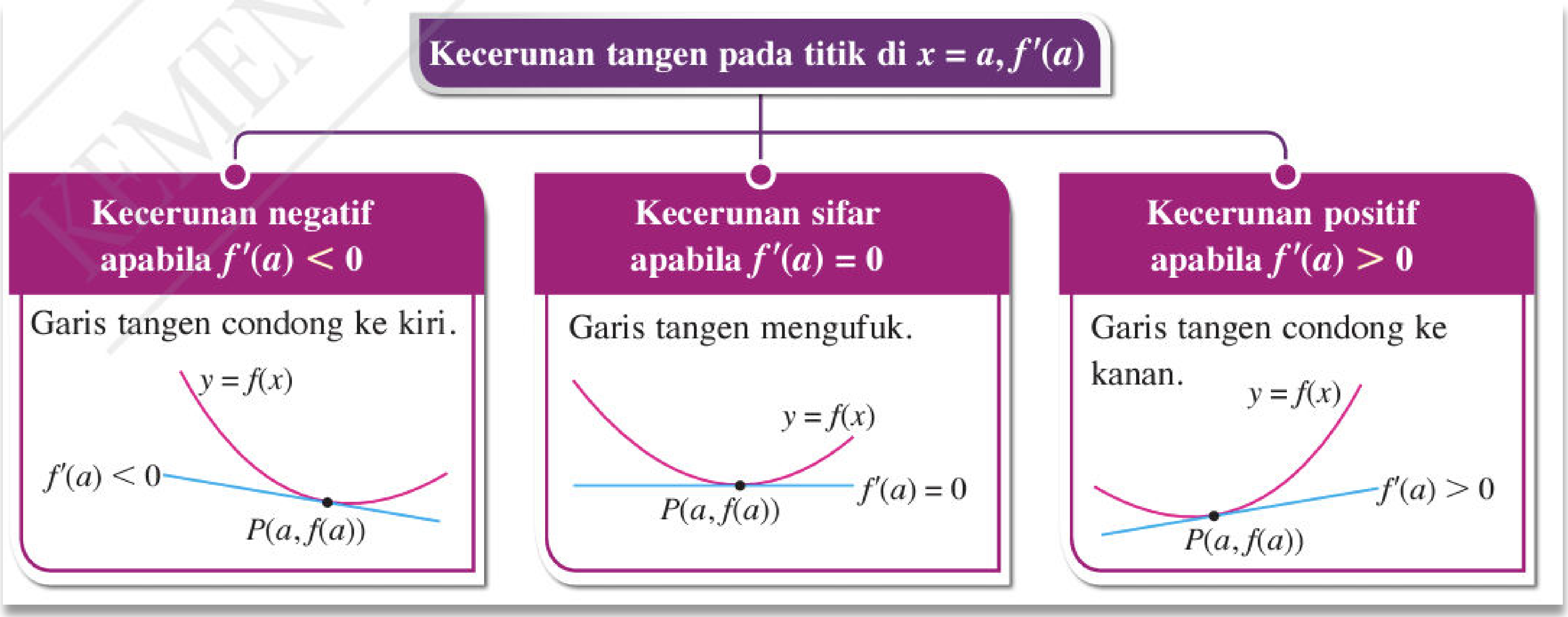
Misalnya, bagi fungsi $f(x) = x^2$:

- Apabila $x = -2$, kecerunan tangen, $f'(-2) = 2(-2) = -4$
- Apabila $x = -1$, kecerunan tangen, $f'(-1) = 2(-1) = -2$
- Apabila $x = 0$, kecerunan tangen, $f'(0) = 2(0) = 0$
- Apabila $x = 1$, kecerunan tangen, $f'(1) = 2(1) = 2$
- Apabila $x = 2$, kecerunan tangen, $f'(2) = 2(2) = 4$

Rajah di sebelah menunjukkan kecerunan tangen kepada lengkung $f(x) = x^2$ pada lima titik yang berlainan.



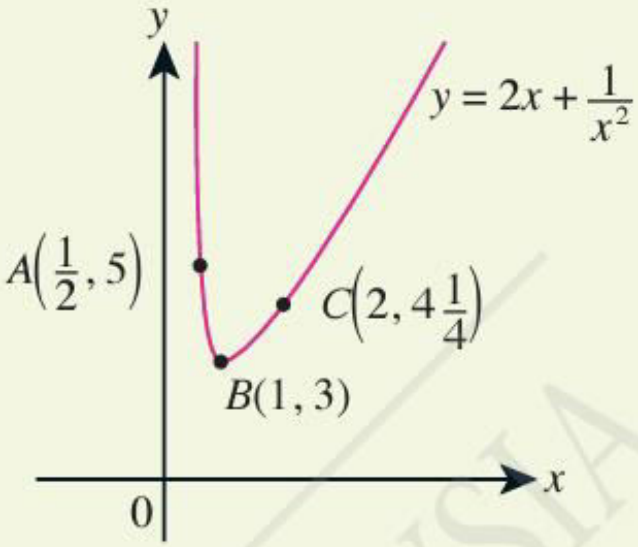
Kecerunan tangen kepada satu lengkung pada titik-titik yang berlainan



Kecerunan tangen pada titik di x

Contoh 13

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ dan titik-titik $A\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, $B(1, 3)$ dan $C\left(2, 4\frac{1}{4}\right)$ yang terletak pada lengkung itu.



(a) Cari

(i) ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$,

(ii) kecerunan tangen bagi lengkung pada titik A, B dan C.

(b) Untuk setiap titik A, B dan C, nyatakan keadaan kecerunan tangennya pada lengkung itu.

Penyelesaian

(a) (i)
$$y = 2x + \frac{1}{x^2}$$
$$= 2x + x^{-2}$$
$$\frac{dy}{dx} = 2 + (-2x^{-2-1})$$
$$= 2 - 2x^{-3}$$
$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2}{x^3}$$

(ii) Kecerunan tangen di $A\left(\frac{1}{2}, 5\right) = 2 - \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$
$$= -14$$

Kecerunan tangen di $B(1, 3) = 2 - \frac{2}{1^3}$
$$= 0$$

Kecerunan tangen di $C\left(2, 4\frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{2}{2^3}$
$$= 1\frac{3}{4}$$

(b) Pada titik A, kecerunan tangennya ialah -14 (< 0). Jadi, kecerunannya adalah negatif dengan garis tangen condong ke kiri.

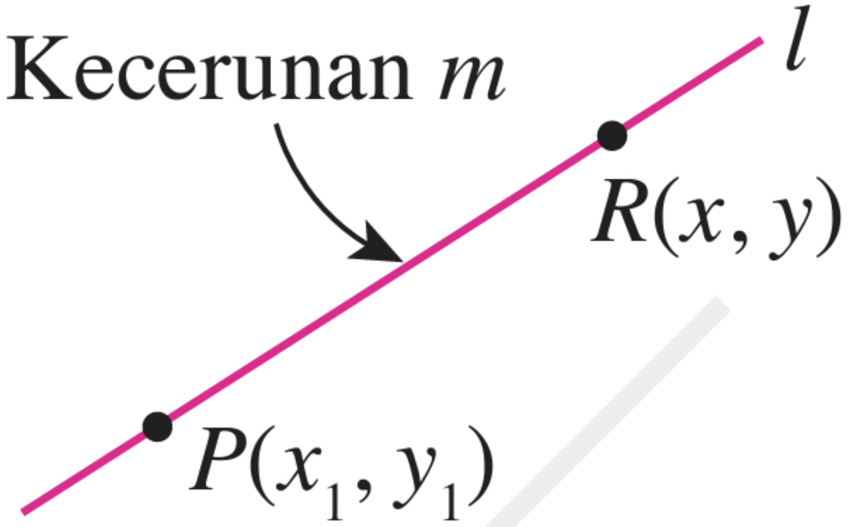
Pada titik B, kecerunan tangennya ialah 0. Jadi, kecerunannya adalah sifar dengan garis tangen adalah mengufuk.

Pada titik C, kecerunan tangennya ialah $1\frac{3}{4}$ (> 0). Jadi, kecerunannya adalah positif dengan garis tangen condong ke kanan.

Latihan Kendiri 2.7

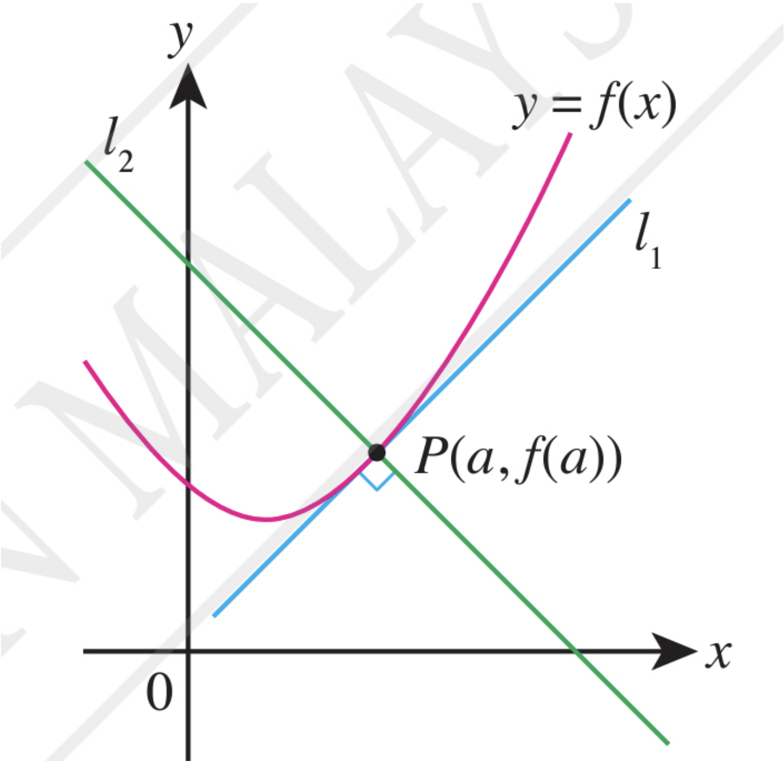
1. Persamaan bagi suatu lengkung ialah $y = 9x + \frac{1}{x}$ untuk $x > 0$.
   (a) (i) Cari kecerunan tangen kepada lengkung itu di $x = \frac{1}{4}$ dan $x = 1$.
   (ii) Untuk setiap koordinat-x itu, nyatakan keadaan kecerunan tangennya kepada lengkung itu.
   (b) Seterusnya, cari koordinat titik pada lengkung dengan keadaan garis tangennya adalah mengufuk.

2. Lengkung $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ mempunyai kecerunan -14 dan 7 masing-masing di $x = \frac{1}{2}$ dan $x = 2$.
   (a) Tentukan nilai a dan nilai b.
   (b) Cari koordinat titik pada lengkung dengan keadaan kecerunan tangennya ialah sifar.



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Persamaan tangen dan normal kepada satu lengkung pada suatu titik



$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

persamaan bagi tangen

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

persamaan bagi normal

Contoh 14

Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ pada titik $P(2, 5)$.

Penyelesaian

Diberi $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$, jadi $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

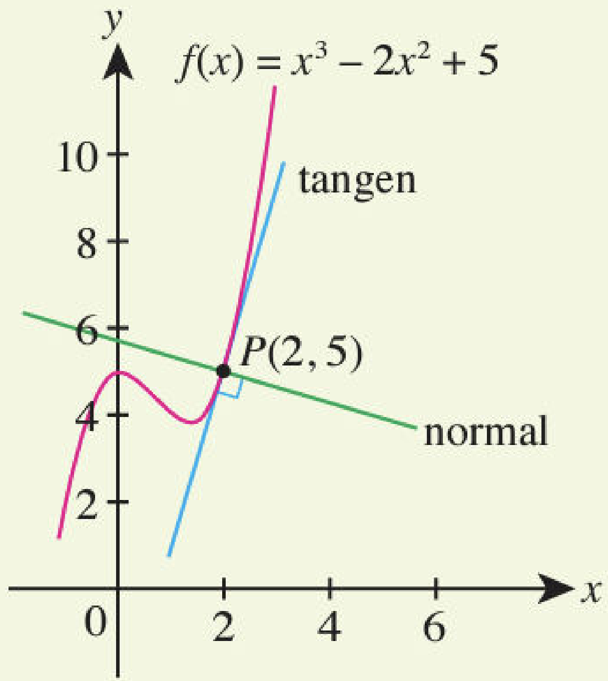
Apabila $x = 2$, $f'(2) = 3(2)^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$

Kecerunan tangen pada titik $P(2, 5)$ ialah 4.

Persamaan tangen ialah
$$\begin{aligned} y - 5 &= 4(x - 2) \\ y - 5 &= 4x - 8 \\ y &= 4x - 3 \end{aligned}$$

Kecerunan normal pada titik $P(2, 5)$ ialah $-\frac{1}{4}$.

Persamaan normal ialah
$$\begin{aligned} y - 5 &= -\frac{1}{4}(x - 2) \\ 4y - 20 &= -x + 2 \\ 4y + x &= 22 \end{aligned}$$



Latihan Kendiri 2.8

1. Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung pada titik yang diberi berikut.

(a) $f(x) = 5x^2 - 7x - 1$ pada titik $(1, -3)$

(b) $f(x) = x^3 - 5x + 6$ pada titik $(2, 4)$

(c) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ pada titik $(4, 3)$

(d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ pada titik $(3, 2)$

2. Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung pada nilai x yang diberi berikut.

(a) $y = 2x^3 - 4x + 3, x = 1$

(b) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x = 4$

(c) $y = \sqrt{x + 1}, x = 3$

(d) $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}, x = -2$

(e) $y = 2 + \dfrac{1}{x}, x = -1$

(f) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}, x = 3$

3. Satu tangen dan normal dilukis pada lengkung $y = x\sqrt{1 - 2x}$ di $x = -4$. Cari

(a) nilai $\dfrac{dy}{dx}$ di $x = -4$,

(b) persamaan tangen,

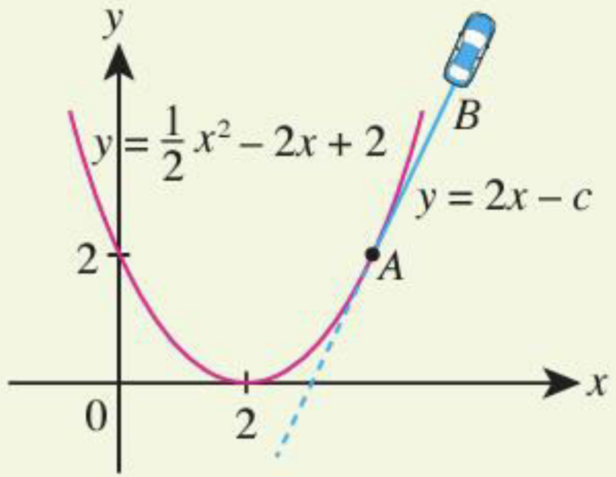
(c) persamaan normal.

4. (a) Tangen kepada lengkung $y = (x - 2)^2$ pada titik $(3, 1)$ melalui titik $(k, 7)$. Cari nilai k.

(b) Normal kepada lengkung $y = 7x - \dfrac{6}{x}$ di $x = 1$ menyilang paksi-x di titik A. Cari koordinat A.

Contoh 15 APLIKASI MATEMATIK

Rajah di sebelah menunjukkan sebatang jalan raya yang boleh diwakili oleh lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$. Kumar memandu keretanya di jalan raya itu. Oleh kerana hujan, jalan tersebut menjadi licin dan menyebabkan Kumar tersasar di titik A lalu mengikut laluan AB yang merupakan garis tangen $y = 2x - c$ kepada jalan raya itu. Cari



(a) koordinat A,

(b) nilai pemalar c.

Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Sebatang jalan raya diwakili oleh lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.
- Kumar memandu keretanya di jalan raya itu dan tersasar di titik A lalu mengikut laluan $y = 2x - c$, iaitu laluan tangen kepada jalan raya.
- Cari koordinat A dan nilai pemalar c.

2 . Merancang strategi

- Cari fungsi kecerunan, $\frac{dy}{dx}$ bagi lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.
- Kecerunan bagi $y = 2x - c$ ialah 2.
- Selesaikan $\frac{dy}{dx} = 2$ untuk memperoleh koordinat A.
- Gantikan koordinat A yang diperoleh ke dalam fungsi $y = 2x - c$ untuk mencari nilai pemalar c.

3 . Melaksanakan strategi

(a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$\frac{dy}{dx} = x - 2$

Oleh sebab $y = 2x - c$ ialah tangen kepada jalan raya $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ di titik A, jadi

$\frac{dy}{dx} = 2$

$x - 2 = 2$

$x = 4$

Oleh sebab titik A terletak di atas lengkung, jadi

$y = \frac{1}{2}(4)^2 - 2(4) + 2$

$y = 2$

Maka, koordinat A ialah $(4, 2)$.

(b) Titik $A(4, 2)$ terletak di atas laluan AB, iaitu $y = 2x - c$, jadi

$2 = 2(4) - c$

$c = 6$

Maka, nilai bagi pemalar c ialah 6.

4 . Membuat refleksi

(a) Gantikan $x = 4$ bagi $A(4, 2)$ ke dalam $y = 2x - 6$, kita peroleh

$y = 2(4) - 6$

$y = 8 - 6$

$y = 2$

(b) Laluan AB, iaitu $y = 2x - c$ dengan kecerunan 2 melalui titik $A(4, 2)$ dan $(0, -c)$, maka

kecerunan $AB = 2$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2$

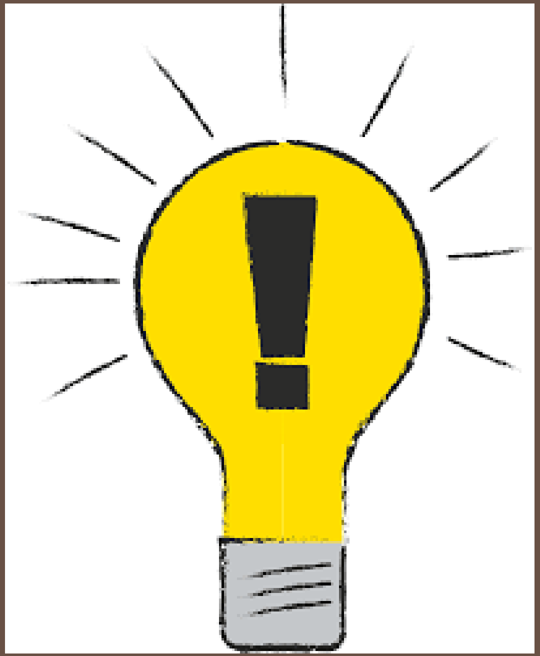
$\frac{2 - (-c)}{4 - 0} = 2$

$\frac{2 + c}{4} = 2$

$c + 2 = 8$

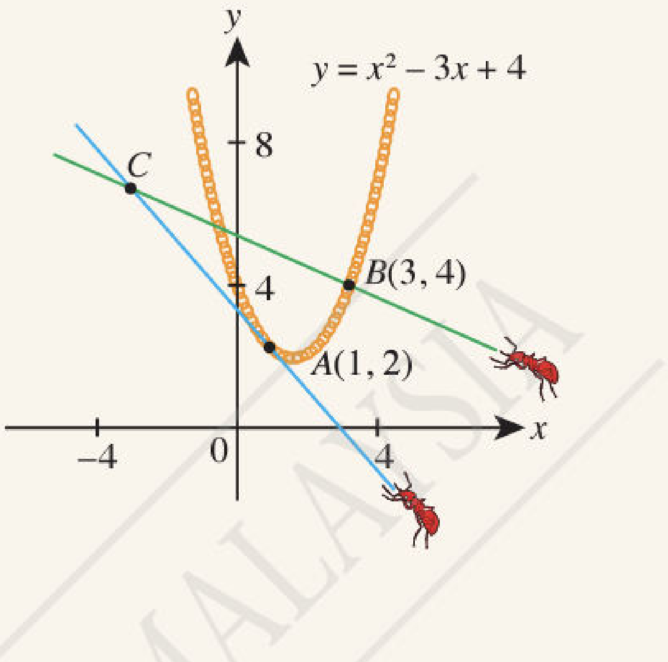
$c = 8 - 2$

$c = 6$



Latihan Kendiri 2.9

1. Rajah di sebelah menunjukkan seutas gelang tangan yang boleh diwakili oleh lengkung $y = x^2 - 3x + 4$ dengan keadaan titik $A(1, 2)$ dan titik $B(3, 4)$ terletak di atas gelang itu. Garis AC ialah tangen kepada gelang pada titik A dan garis BC pula ialah normal kepada gelang pada titik B. Dua ekor semut berjalan masing-masing di sepanjang garis tangen AC dan garis normal BC, dan bertemu pada titik C. Cari
   (a) persamaan tangen pada titik A,
   (b) persamaan normal pada titik B,
   (c) koordinat C, iaitu titik pertemuan kedua-dua ekor semut itu.



2. Persamaan bagi suatu lengkung ialah $y = 2x^2 - 5x - 2$.

(a) Cari persamaan normal kepada lengkung itu pada titik $A(1, -5)$.

(b) Normal itu bertemu lengkung sekali lagi pada titik B. Cari koordinat B.

(c) Seterusnya, cari koordinat titik tengah AB.

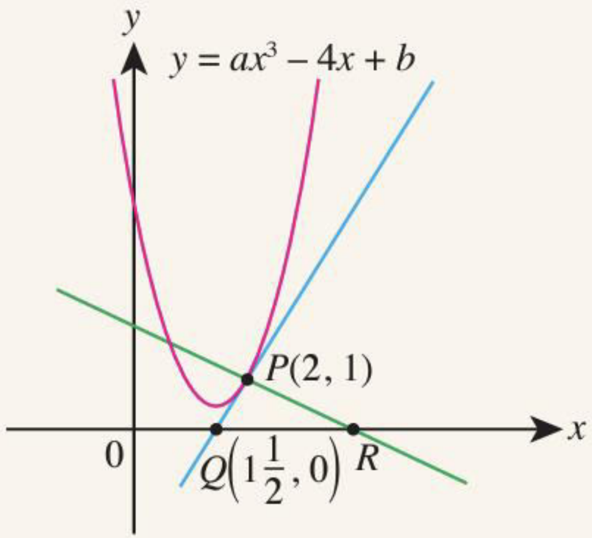
3. Dalam rajah di sebelah, tangen kepada lengkung $y = ax^3 - 4x + b$ di $P(2, 1)$ menyilang paksi-x di $Q\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$. Normal di P pula menyilang paksi-x di R. Cari

(a) nilai a dan nilai b,

(b) persamaan normal di titik P,

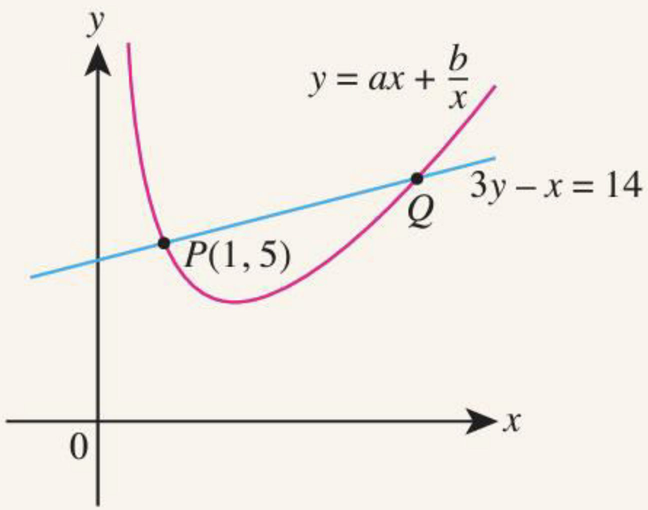
(c) koordinat R,

(d) luas segi tiga PQR.



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = ax + \frac{b}{x}$. Garis $3y - x = 14$ adalah normal kepada lengkung di titik $P(1, 5)$ dan normal ini bertemu lengkung sekali lagi di titik Q. Cari

(a) nilai a dan nilai b,
(b) persamaan tangen di titik P,
(c) koordinat Q,
(d) koordinat titik tengah PQ.

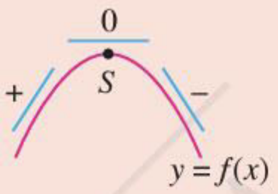


5. (a) Tangen kepada lengkung $y = \sqrt{2x + 1}$ di titik $A(4, 3)$ memotong paksi-x di titik B. Cari jarak AB.

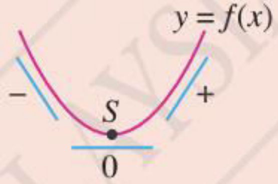
(b) Tangen kepada lengkung $y = hx^3 + kx + 2$ di $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ adalah selari dengan normal kepada lengkung $y = x^2 + 6x + 4$ di $(-2, -4)$. Cari nilai pemalar h dan nilai pemalar k.

Bagi suatu lengkung $y = f(x)$ dengan titik pegun S di $x = a$,

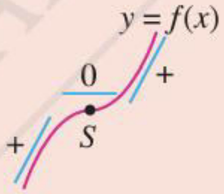
- Jika $\dfrac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada positif kepada negatif apabila x menokok melalui a, titik S ialah titik maksimum.



- Jika $\dfrac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada negatif kepada positif apabila x menokok melalui a, titik S ialah titik minimum.



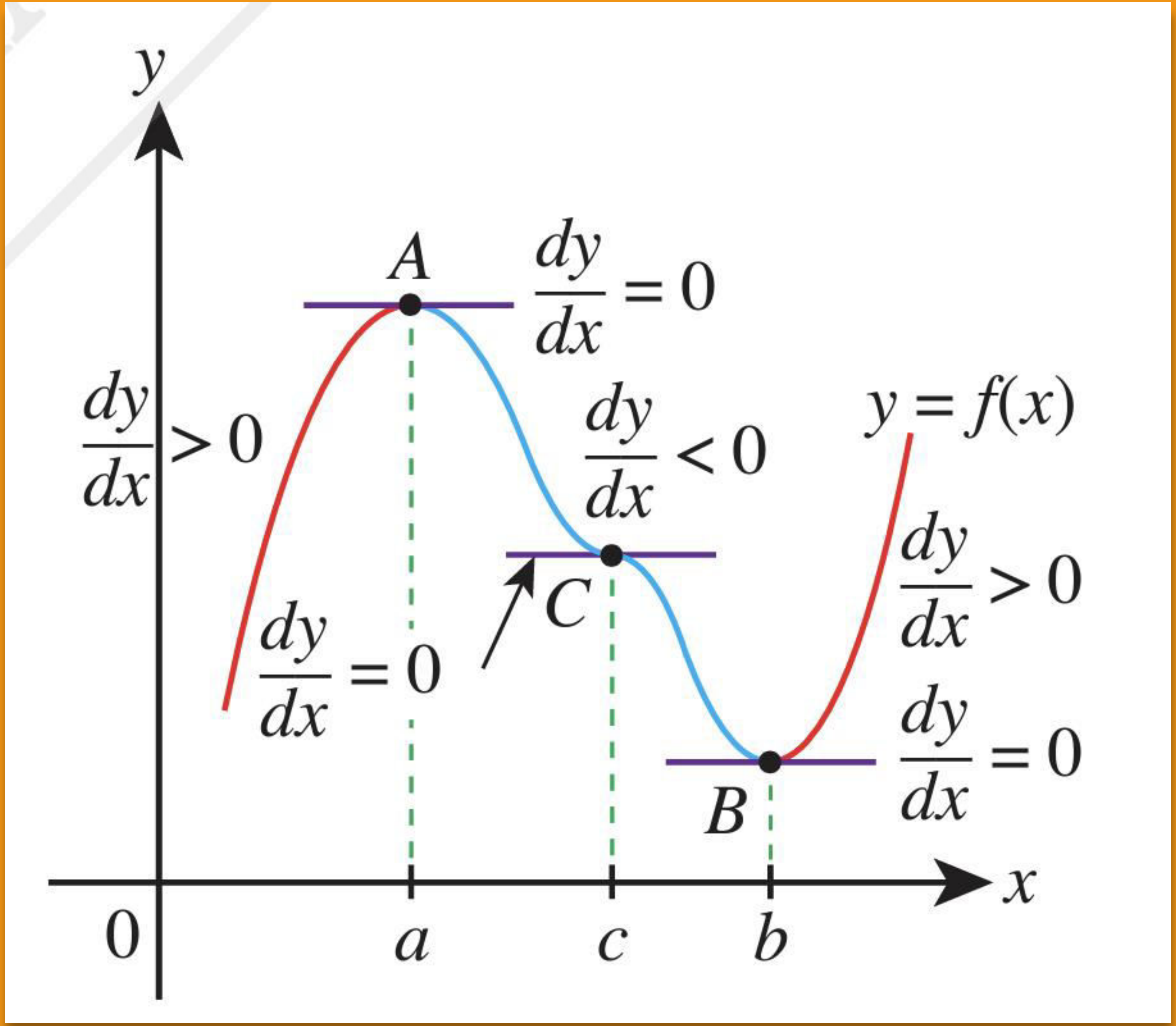
- Jika $\dfrac{dy}{dx}$ tidak berubah tanda apabila x menokok melalui a, titik S ialah **titik lengkok balas**.



Titik pegun disebut sebagai **titik pusingan** jika titik itu ialah titik maksimum atau minimum.

Titik pusingan dan sifat titik pusingan tersebut

titik pegun



y
A
$\frac{dy}{dx} = 0$
$\frac{dy}{dx} > 0$
$\frac{dy}{dx} < 0$
$y = f(x)$
C
$\frac{dy}{dx} = 0$
$\frac{dy}{dx} > 0$
$\frac{dy}{dx} = 0$
B
x
0
a
c
b

Titik pegun A ialah titik maksimum

Apabila x menokok melalui $x = a$, nilai $\frac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada positif kepada negatif.

Titik pegun B ialah titik minimum

Apabila x menokok melalui $x = b$, nilai $\frac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada negatif kepada positif.

titik pusingan

Contoh 16

Diberi lengkung $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.

(a) Cari koordinat titik pusingan bagi lengkung itu.

(b) Tentukan sama ada setiap titik pusingan itu ialah titik maksimum atau minimum.

Penyelesaian

(a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

$$= 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x + 1)(x - 3)$$

Untuk titik pusingan, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$3(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \text{ atau } x = 3$$

Apabila $x = -1$, $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 11$

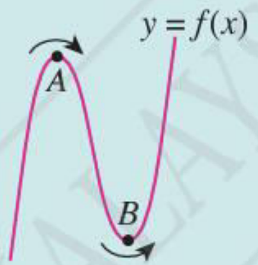
$$y = 16$$

Apabila $x = 3$, $y = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 11$

$$y = -16$$

Maka, titik pusingan ialah $(-1, 16)$ dan $(3, -16)$.

Sudut Informasi



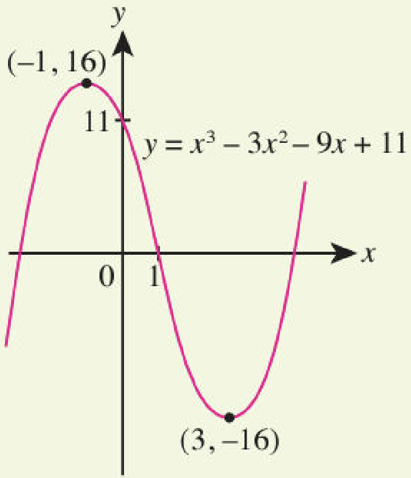
Apabila lengkung $y = f(x)$ berpusing dan bertukar arah pada titik A dan titik B, titik maksimum A dan titik minimum B disebut sebagai titik pusingan.

(b)

x	-1.5	-1	-0.5	2.5	3	3.5
$\frac{dy}{dx}$	6.75	0	-5.25	-5.25	0	6.75
Tanda bagi $\frac{dy}{dx}$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
Lakaran tangen						
Lakaran graf						

Daripada jadual, tanda bagi $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada positif kepada negatif apabila x menokok melalui $x = -1$ dan tanda bagi $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada negatif kepada positif apabila x menokok melalui $x = 3$. Maka, titik pusingan $(-1, 16)$ ialah titik maksimum dan titik pusingan $(3, -16)$ ialah titik minimum.

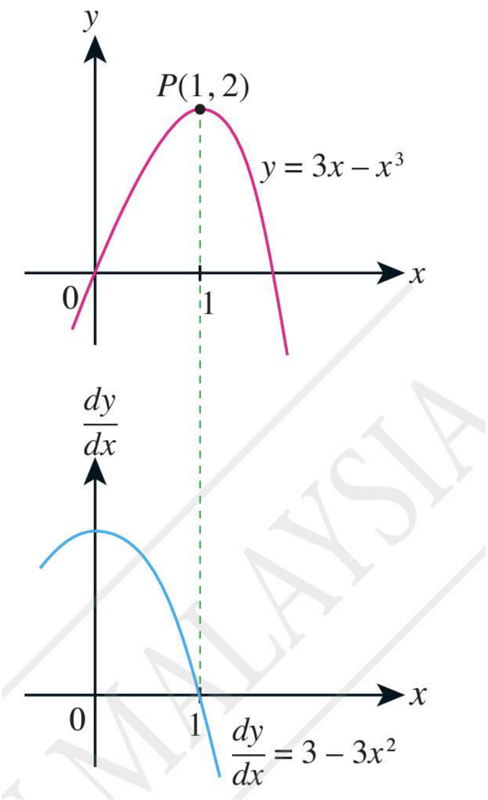
Lakaran graf bagi lengkung $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ dengan titik pusingan maksimum $(-1, 16)$ dan titik pusingan minimum $(3, -16)$ dapat ditunjukkan seperti dalam rajah di sebelah.



$\frac{dy}{dx}$ menurun apabila x menokok melalui $x = 1$

$\Leftrightarrow$ Kadar perubahan $\frac{dy}{dx}$ ialah negatif di $x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$ di $x = 1$



pembezaan peringkat kedua

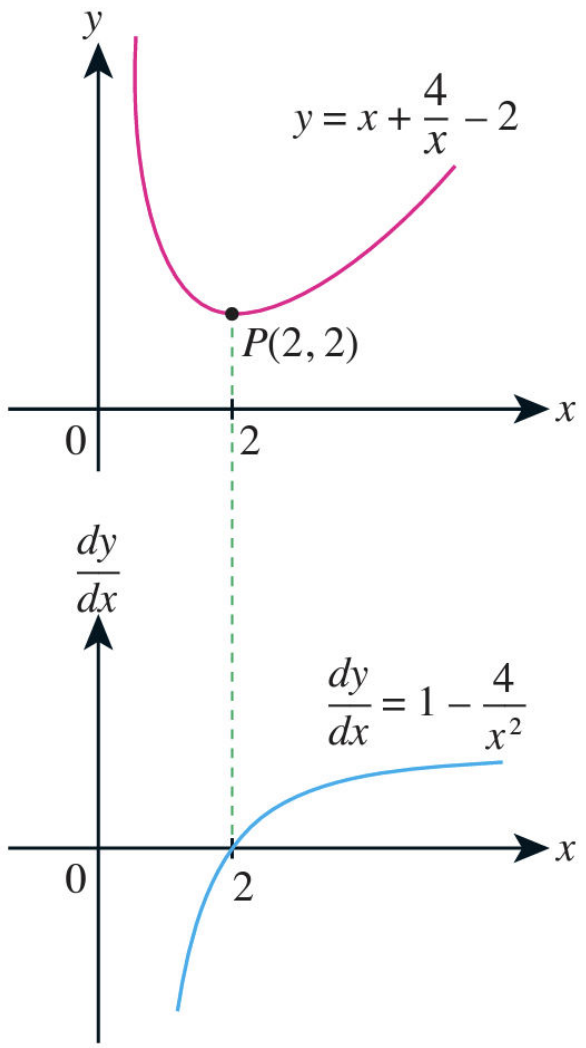
Suatu titik pusingan pada lengkung $y = f(x)$ ialah titik maksimum apabila $\frac{dy}{dx} = 0$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$.

titik pusingan pada lengkung

$$\frac{dy}{dx} \text{ meningkat apabila } x \text{ menokok melalui } x = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{ Kadar perubahan } \frac{dy}{dx} \text{ ialah positif di } x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0 \text{ di } x = 2$$



titik pusingan pada lengkung

Suatu titik pusingan pada lengkung $y = f(x)$ ialah titik minimum apabila $\frac{dy}{dx} = 0$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$.

titik pusingan pada lengkung minimum

Contoh 17

Cari titik-titik pegun bagi setiap lengkung berikut dan tentukan sifat setiap titik pegun itu.

(a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ (b) $y = x^4 - 4x^3 + 1$

Penyelesaian

(a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x^2 + x - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(x + 2)(x - 1)$$

Untuk titik pegun, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$6(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 1$$

Apabila $x = -2$, $y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 5$

$$y = 25$$

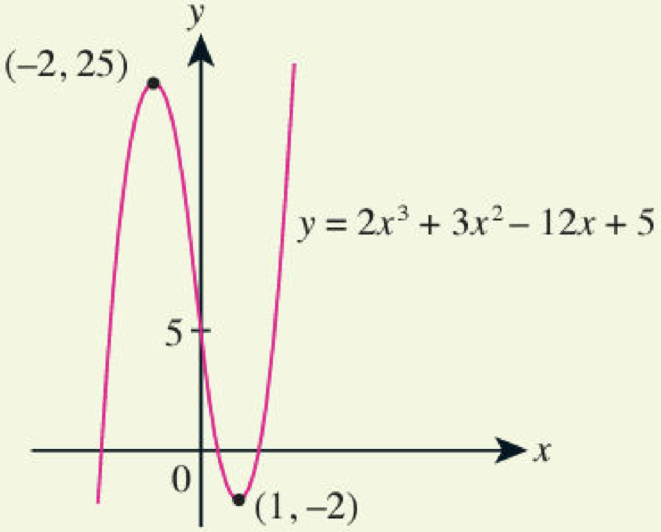
Apabila $x = 1$, $y = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 5$
$y = -2$

Maka, titik pegun ialah $(-2, 25)$ dan $(1, -2)$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 6$

Apabila $x = -2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-2) + 6 = -18 < 0$

Apabila $x = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(1) + 6 = 18 > 0$



Maka, $(-2, 25)$ ialah titik maksimum dan $(1, -2)$ ialah titik minimum.

(b) $y = x^4 - 4x^3 + 1$

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2$

$\frac{dy}{dx} = 4x^2(x - 3)$

Untuk titik pegun, $\frac{dy}{dx} = 0$

$4x^2(x - 3) = 0$

$x = 0$ atau $x = 3$

Apabila $x = 0$, $y = 0^4 - 4(0)^3 + 1 = 1$
Apabila $x = 3$, $y = 3^4 - 4(3)^3 + 1 = -26$
Maka, titik pegun ialah (0, 1) dan (3, –26).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x$$

Apabila $x = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(0)^2 - 24(0) = 0$

x	-0.1	0	0.1
$\frac{dy}{dx}$	-0.124	0	-0.116
Tanda bagi $\frac{dy}{dx}$	$-$	0	$-$
Lakaran tangen			
Lakaran graf			

Daripada jadual, didapati bahawa $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada negatif kepada sifar dan kemudian kepada negatif sekali lagi, iaitu tiada perubahan tanda apabila x menokok melalui 0.
Maka, (0, 1) ialah titik lengkok balas.

Apabila $x = 3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(3)^2 - 24(3) = 36 > 0$

Maka, (3, –26) ialah titik minimum.

Latihan Kendiri 2.10

1. Cari koordinat titik pusingan bagi setiap lengkung berikut. Dalam setiap kes, tentukan sama ada titik pusingan itu ialah titik maksimum atau titik minimum.

(a) $y = x^3 - 12x$ (b) $y = x(x - 6)^2$ (c) $y = x\sqrt{18 - x^2}$ (d) $y = (x - 6)(4 - 2x)$

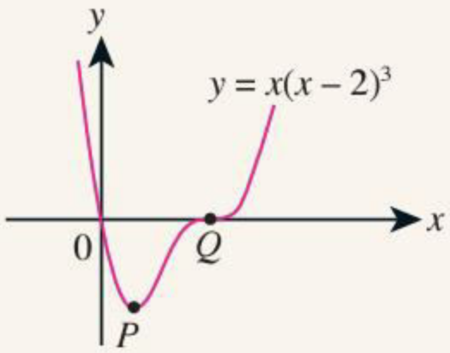
(e) $y = x + \dfrac{4}{x}$ (f) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ (g) $y = x + \dfrac{1}{x - 1}$ (h) $y = \dfrac{(x - 3)^2}{x}$

2. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = x(x - 2)^3$.

(a) Cari ungkapan bagi $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Cari koordinat titik bagi dua titik pegun P dan Q.

(c) Seterusnya, tentukan sifat bagi titik pegun Q menggunakan kaedah lakaran tangen.



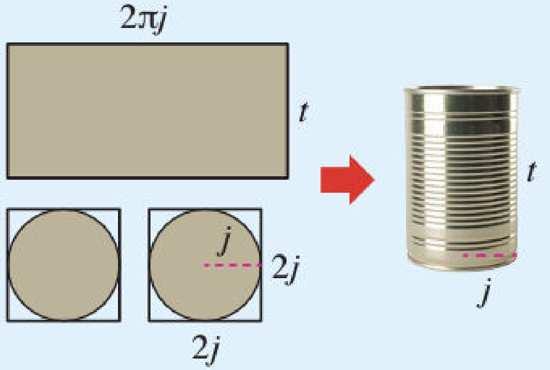
Contoh 18 APLIKASI MATEMATIK

Sebuah kilang ingin menghasilkan tin makanan berbentuk silinder yang diperbuat daripada beberapa kepingan aluminium dengan isi padu 512 cm^3. Permukaan melengkung tin dibentuk dengan menggulung sekeping aluminium berbentuk segi empat tepat manakala bahagian atas dan bawah tin dibentuk dengan memotong keluar dua buah bulatan daripada dua keping aluminium berbentuk segi empat sama. Cari jejari tapak tin itu, dalam cm, supaya jumlah luas permukaan semua kepingan aluminium yang digunakan adalah minimum.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Katakan j cm ialah jejari tapak dan t cm adalah tinggi tin.
- Isi padu tin, $I = \pi j^2 t = 512\text{ cm}^3$
- Jumlah luas permukaan kepingan aluminium yang digunakan,
  $L = 2(2j)^2 + 2\pi jt$
  $L = 2(4j^2) + 2\pi jt$
  $L = 8j^2 + 2\pi jt$
- Cari nilai j dengan keadaan L adalah minimum.



2. Merancang strategi

- Ungkapkan L dalam sebutan satu pemboleh ubah tunggal, iaitu dengan mengungkapkan t dalam sebutan j.
- Cari nilai j apabila $\frac{dL}{dj} = 0$.
- Menggunakan nilai j yang diperoleh, tentukan sama ada L adalah maksimum atau minimum.

3 . Melaksanakan strategi

Isi padu tin, $I = 512$

$$\pi j^2 t = 512$$

$$t = \frac{512}{\pi j^2} \; \ldots \; (1)$$

Jumlah luas permukaan, L cm², kepingan-kepingan aluminium yang digunakan diberi oleh

$$L = 8j^2 + 2\pi jt \; \ldots \; (2)$$

Gantikan (1) ke dalam (2),

$$L = 8j^2 + 2\pi j\left(\frac{512}{\pi j^2}\right)$$

$$L = 8j^2 + \frac{1\,024}{j}$$

$$\frac{dL}{dj} = 16j - \frac{1\,024}{j^2}$$

Untuk nilai minimum, $\frac{dL}{dj} = 0$

$$16j - \frac{1\,024}{j^2} = 0$$

$$16j^3 - 1\,024 = 0$$

$$j^3 = \frac{1\,024}{16}$$

$$j^3 = 64$$

$$j = \sqrt[3]{64}$$

$$j = 4$$

$$\frac{dL}{dj} = 16j - 1\,024j^{-2}$$

$$\frac{d^2L}{dj^2} = 16 + \frac{2\,048}{j^3}$$

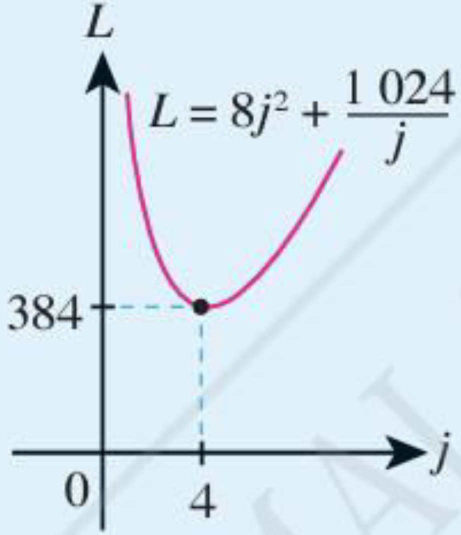
Apabila $j = 4$, $\frac{d^2L}{dj^2} = 16 + \frac{2\,048}{4^3}$

$$= 48 > 0$$

Maka, L mempunyai nilai minimum apabila jejari tapak ialah 4 cm.

4 . Membuat refleksi dan tafsiran

Lakaran graf bagi $L = 8j^2 + \frac{1\,024}{j}$ menunjukkan bahawa nilai L adalah minimum di $j = 4$.



Jadi, kilang itu perlu menghasilkan tin makanan dengan jejari tapak ialah 4 cm dan tinggi, $t = \frac{512}{\pi j^2} = \frac{512}{\pi(4)^2}$ $= 10.186$ cm supaya jumlah luas permukaan kepingan-kepingan aluminium yang digunakan adalah minimum.

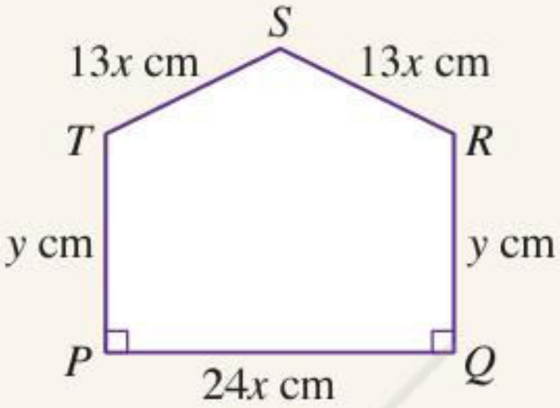
Latihan Kendiri 2.11

1. Seutas wayar dengan panjang 80 cm dibengkokkan untuk membentuk sebuah sektor POQ bagi sebuah bulatan berpusat O. Diberi bahawa $OQ = j$ cm dan $\angle POQ = \theta$ radian.

(a) Tunjukkan bahawa luas, A cm^2, bagi sektor POQ itu diberi oleh $A = \frac{1}{2}j(80 - 2j)$.

(b) Seterusnya, cari luas maksimum bagi sektor POQ itu.

2. Seutas dawai dengan panjang 240 cm dibengkokkan kepada suatu bentuk seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah.



   (a) Ungkapkan y dalam sebutan x.
   (b) Tunjukkan bahawa luas, L cm^2, yang dilitupi oleh dawai itu diberi oleh $L = 2\,880x - 540x^2$.
   (c) Cari
      (i) nilai x dan nilai y supaya L adalah maksimum,
      (ii) luas maksimum, dalam cm^2, rantau itu.

3. Sebuah kilang menghasilkan tin minuman berbentuk silinder tegak tertutup dengan isi padu 32π cm^3. Kos bahan yang digunakan untuk bulatan atas dan bawah tin itu ialah 2 sen per cm^2 manakala sisi melengkung tin ialah 1 sen per cm^2.
   (a) Tunjukkan bahawa fungsi kos, C membuat tin minuman itu diberi oleh $C = 4\pi j^2 + \dfrac{64\pi}{j}$, dengan j ialah jejari tapak kon.
   (b) Cari ukuran tin supaya kos yang digunakan oleh kilang itu adalah minimum.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \text{ (Petua rantai)}$$

Pertimbangkan lengkung $y = x^2 + 1$. Jika x menokok dengan kadar tetap 2 unit per saat, iaitu $\frac{dx}{dt} = 2$, maka kadar perubahan y diberi oleh:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \\ &= 2x \times 2 \\ &= 4x \end{aligned}$$

Petua rantai

Apabila $x = 2$, $\frac{dy}{dt} = 4(2) = 8$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah 8 unit per saat dan y dikatakan menokok pada kadar 8 unit per saat pada ketika $x = 2$.

Apabila $x = -2$, $\frac{dy}{dt} = 4(-2) = -8$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah -8 unit per saat dan y dikatakan menyusut pada kadar 8 unit per saat pada ketika $x = -2$.

Mentafsir dan menentukan kadar perubahan bagi kuantiti yang terhubung

Contoh 19

Suatu lengkung mempunyai persamaan $y = x^2 + \dfrac{4}{x}$. Cari

(a) ungkapan bagi $\dfrac{dy}{dx}$,

(b) kadar perubahan y apabila $x = 1$ dan $x = 2$, diberi bahawa x menokok dengan kadar tetap 3 unit per saat.

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned}
y &= x^2 + \frac{4}{x} \\
&= x^2 + 4x^{-1} \\
\frac{dy}{dx} &= 2x - 4x^{-2} \\
\frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{4}{x^2}
\end{aligned}$$

(b) Apabila $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2(1) - \frac{4}{1^2}$
$$= -2$$

Kadar perubahan y diberi oleh:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \\
&= -2 \times 3 \\
&= -6
\end{aligned}$$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah -6 unit per saat.
Maka, y dikatakan menyusut pada kadar 6 unit per saat.

Apabila $x = 2$, $\dfrac{dy}{dx} = 2(2) - \dfrac{4}{2^2}$

$$= 3$$

Kadar perubahan y diberi oleh:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$
$$= 3 \times 3$$
$$= 9$$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah 9 unit per saat.

Maka, y dikatakan menokok pada kadar 9 unit per saat.

Latihan Kendiri 2.12

1. Bagi setiap persamaan yang menghubungkan x dan y berikut, jika kadar perubahan x ialah 2 unit s^{-1}, cari kadar perubahan y pada ketika yang diberi.

(a) $y = 3x^2 - 4, x = \frac{1}{2}$

(b) $y = 2x^2 + \frac{1}{x}, x = 1$

(c) $y = \frac{2}{(3x - 5)^3}, x = 2$

(d) $y = (4x - 3)^5, x = \frac{1}{2}$

(e) $y = \frac{x}{x + 1}, y = 2$

(f) $y = x^3 + 2, y = 10$

2. Bagi setiap persamaan yang menghubungkan x dan y berikut, jika kadar perubahan y ialah 6 unit s^{-1}, cari kadar perubahan x pada ketika yang diberi.

(a) $y = x^3 - 2x^2, x = 1$

(b) $y = x^2 + \frac{4}{x}, x = 2$

(c) $y = \frac{2x^2}{x - 1}, x = 3$

(d) $y = (x - 6)\sqrt{x - 1}, x = 2$

(e) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}, y = 3$

(f) $y = \sqrt{2x + 7}, y = 3$

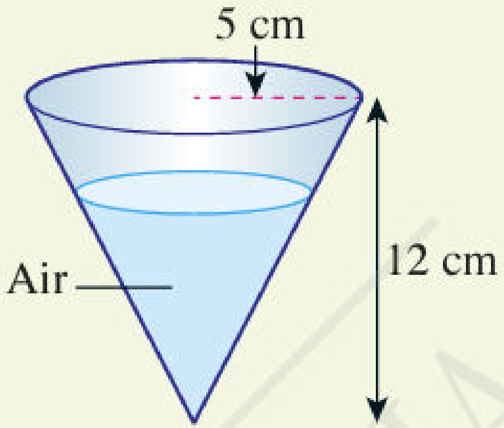
3. Suatu lengkung mempunyai persamaan $y = (x - 8)\sqrt{x + 4}$. Cari

(a) ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$,

(b) kadar perubahan y pada ketika $x = 5$, jika x menokok dengan kadar 6 unit per saat.

Contoh 20

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah bekas berisi air yang berbentuk kon dengan jejari 5 cm dan tinggi 12 cm. Didapati bahawa air tersebut mengalir keluar melalui lubang kecil di hujung bekas dengan kadar tetap 4 cm^3s^{-1}. Cari kadar perubahan kedalaman air di dalam bekas itu apabila kedalaman air ialah 3 cm, betul kepada empat angka bererti.

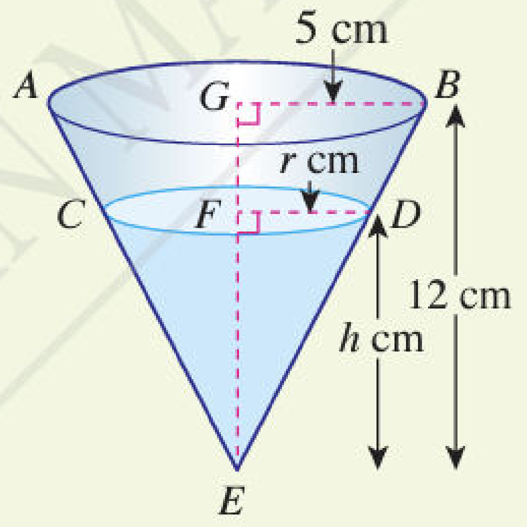


Penyelesaian

Katakan r cm, h cm dan V cm^3 masing-masing ialah jejari, tinggi dan isi padu air di dalam bekas itu pada masa t saat.

Jadi, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ … ❶

Didapati bahawa ΔDFE dan ΔBGE adalah serupa.



Jadi, $\frac{r}{5} = \frac{h}{12}$

$r = \frac{5h}{12}$ … ❷

Gantikan ❷ ke dalam ❶:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5h}{12}\right)^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{25h^2}{144}\right)h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{25h^3}{144}\right)$$

$$V = \frac{25\pi}{432}h^3$$

Kadar perubahan V diberi oleh petua rantai berikut.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$$
$$= \frac{d}{dh}\left(\frac{25\pi}{432}h^3\right) \times \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{144}h^2 \times \frac{dh}{dt}$$

Apabila $h = 3$ dan $\frac{dV}{dt} = -4$, kita peroleh

$$-4 = \frac{25\pi}{144}(3)^2 \times \frac{dh}{dt}$$
$$-4 = \frac{25\pi}{16} \times \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{64}{25\pi}$$
$$= -0.8148$$

V menyusut, maka $\frac{dV}{dt}$ adalah negatif

Maka, kadar perubahan kedalaman air di dalam bekas itu ialah -0.8148 cms^{-1} dan kedalaman air dikatakan menyusut pada kadar 0.8148 cms^{-1}.

Contoh 21 APLIKASI MATEMATIK

Jejari sebiji belon berbentuk sfera yang diisikan dengan udara bertambah pada kadar tetap 0.5 cm per saat. Cari kadar perubahan isi padu belon itu apabila jejarinya ialah 4 cm, betul kepada empat angka bererti.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Jejari sebiji belon yang diisikan dengan udara bertambah pada kadar tetap 0.5 cm per saat.
- Cari kadar perubahan isi padu belon apabila jejarinya ialah 4 cm.

2. Merancang strategi

- Katakan j cm dan I cm^3 masing-masing ialah jejari dan isi padu belon pada masa t saat.
- Bentukkan satu persamaan yang menghubungkan isi padu, I dan jejari, j belon itu.
- Gunakan petua rantai untuk menghubungkan kadar perubahan isi padu dan jejari belon itu.

4 . Membuat refleksi dan tafsiran

Apabila $\dfrac{dI}{dt} = 100.5$ dan $\dfrac{dj}{dt} = 0.5$, maka

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dj} \times \frac{dj}{dt}$$
$$100.5 = 4\pi j^2 \times 0.5$$
$$100.5 = 2\pi j^2$$
$$j^2 = \frac{100.5}{2\pi}$$
$$j^2 = \frac{100.5}{2(3.142)}$$
$$j^2 = 15.993$$
$$j = \sqrt{15.993}$$
$$j = \pm 4$$

Maka, $j = 4$ cm.

Jadi, apabila $j = 4$ dan $\dfrac{dI}{dt} = 100.5$ bermaksud pada ketika jejari belon ialah 4 cm, isi padunya menokok dengan kadar 100.5 cm^3 per saat.

3 . Melaksanakan strategi

Andaikan $I = f(j)$.

Kadar perubahan I diberi oleh:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dj} \times \frac{dj}{dt}$$

Diketahui bahawa $I = \dfrac{4}{3}\pi j^3$.

Jadi, $$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dj}\left(\frac{4}{3}\pi j^3\right) \times \frac{dj}{dt}$$
$$\frac{dI}{dt} = 4\pi j^2 \times \frac{dj}{dt}$$

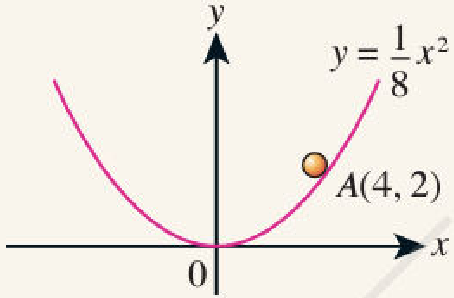
Apabila $j = 4$ dan $\dfrac{dj}{dt} = 0.5$, maka

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= 4\pi(4)^2 \times 0.5\\ &= 4\pi(16) \times 0.5\\ &= 64\pi \times 0.5\\ &= 32\pi\\ &= 32(3.142)\\ &= 100.5\end{aligned}$$

Maka, kadar perubahan isi padu belon apabila $j = 4$ cm ialah 100.5 cm^3 per saat.

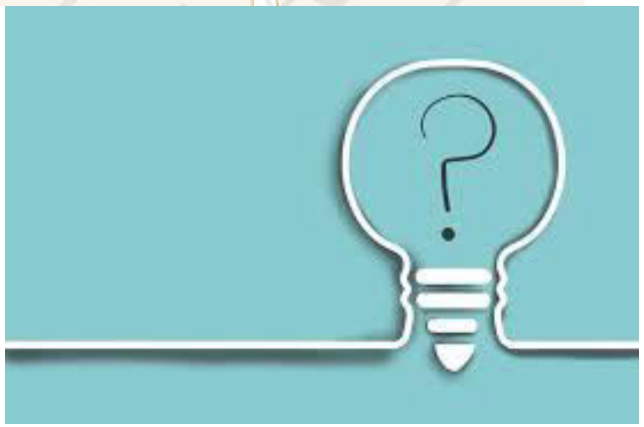
Latihan Kendiri 2.13

1. Rajah di sebelah menunjukkan sebutir manik yang bergerak di sepanjang lengkung $y = \frac{1}{8}x^2$. Pada titik $A(4, 2)$, kadar perubahan x ialah 3 unit s^{-1}. Cari kadar perubahan y yang sepadan.

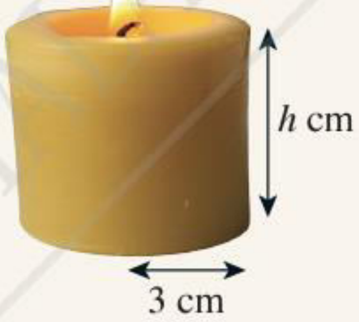


2. Luas sebuah segi empat sama dengan sisi x cm bertambah dengan kadar 8 cm^2s^{-1}. Cari kadar perubahan panjang sisinya apabila luasnya ialah 4 cm^2.

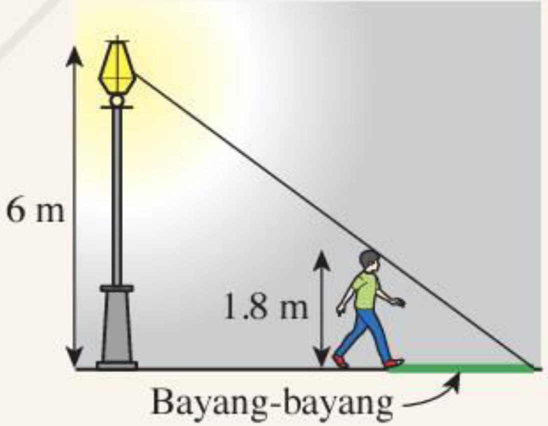
3. Seketul ais berbentuk kubus dengan sisi x cm mencair pada kadar 10.5 cm^3 per minit. Cari kadar perubahan x pada ketika $x = 10$ cm.

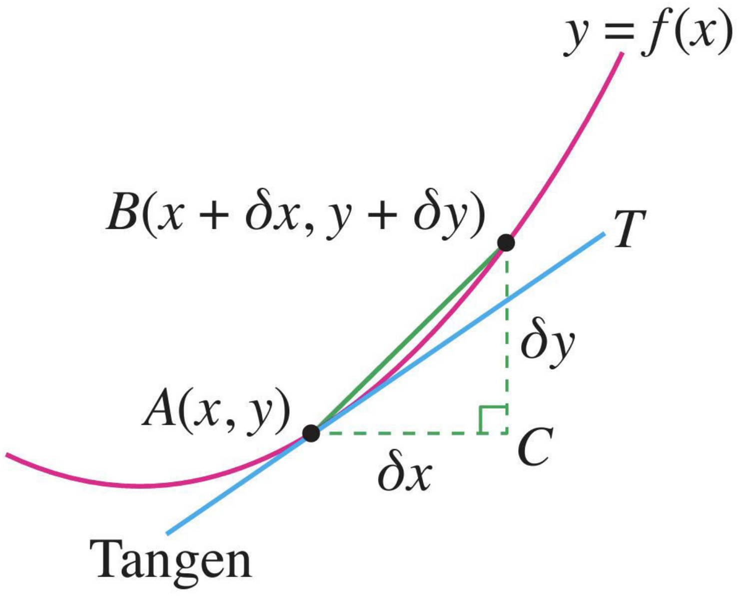


4. Rajah di sebelah menunjukkan sebatang lilin yang berbentuk silinder tegak dan berjejari 3 cm. Tinggi lilin itu ialah h cm dan isi padunya ialah V cm^3. Lilin itu terbakar dengan keadaan tingginya menyusut pada kadar 0.6 cm per minit.
   (a) Ungkapkan V dalam sebutan h.
   (b) Cari kadar perubahan isi padu lilin itu apabila tingginya ialah 8 cm.



5. Chandran berjalan pada kadar 3.5 ms^{-1} daripada sebatang tiang lampu pada waktu malam seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Tinggi Chandran dan tiang lampu itu masing-masing ialah 1.8 m dan 6 m. Cari kadar perubahan
   (a) panjang bayang-bayang Chandran,
   (b) hujung bayang-bayangnya yang bergerak.





$$\text{Nilai bagi } \frac{dy}{dx} \text{ pada titik } A = \text{Nilai bagi } \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$$

Mentafsir dan menentukan perubahan kecil dan penghampiran suatu kuantiti

Bagi suatu fungsi $y = f(x)$, dengan δy ialah perubahan kecil dalam y dan δx ialah perubahan kecil dalam x,

- Apabila $\delta y > 0$, maka berlaku tokokan kecil dalam y akibat perubahan kecil dalam x, iaitu δx.
- Apabila $\delta y < 0$, maka berlaku susutan kecil dalam y akibat perubahan kecil dalam x, iaitu δx.

Seterusnya, oleh sebab $f(x + \delta x) = y + \delta y$ dan $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$, kita peroleh:

$$f(x + \delta x) \approx y + \frac{dy}{dx}\delta x \text{ atau } f(x + \delta x) \approx f(x) + \frac{dy}{dx}\delta x$$

Mentafsir dan menentukan perubahan kecil dan penghampiran suatu kuantiti

Contoh 22

Diberi bahawa $y = x^3$, cari

(a) perubahan hampir dalam y jika x menokok daripada 4 kepada 4.05,

(b) perubahan hampir dalam x jika y menyusut daripada 8 kepada 7.97.

Penyelesaian

(a) $y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Apabila $x = 4$, $\delta x = 4.05 - 4$

$= 0.05$

dan $\dfrac{dy}{dx} = 3(4)^2 = 48$

Jadi, $\delta y \approx \dfrac{dy}{dx} \times \delta x$

$= 48 \times 0.05$

$\delta y = 2.4$

Maka, perubahan hampir dalam y, iaitu δy ialah 2.4.

$\delta y > 0$ bermaksud berlakunya tokokan kecil dalam y sebanyak 2.4.

(b) Apabila $y = 8$, $x^3 = 8$

$x = 2$

$\delta y = 7.97 - 8 = -0.03$

dan $\dfrac{dy}{dx} = 3(2)^2 = 12$

Jadi, $\delta y \approx \dfrac{dy}{dx} \times \delta x$

$-0.03 = 12 \times \delta x$

$\delta x = \dfrac{-0.03}{12}$

$\delta x = -0.0025$

Maka, perubahan hampir dalam x, iaitu δx ialah -0.0025.

$\delta x < 0$ bermaksud berlakunya susutan kecil dalam x sebanyak 0.0025.

Contoh 23

Diberi bahawa $y = \sqrt{x}$, cari

(a) nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 4$

(b) nilai hampir bagi $\sqrt{4.02}$

Penyelesaian

(a)
$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{x} \\
&= x^{\frac{1}{2}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Apabila $x = 4$,
$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{4}} \\
&= \frac{1}{2(2)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(b) Apabila $x = 4$,
$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{4} \\
&= 2 \\
\delta x &= 4.02 - 4 \\
&= 0.02
\end{aligned}
$$

dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}$

Menggunakan $f(x + \delta x) \approx y + \frac{dy}{dx}\delta x$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x + \delta x} &\approx y + \frac{dy}{dx}\delta x \\
\sqrt{4 + 0.02} &= 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\
\sqrt{4.02} &= 2.005
\end{aligned}
$$

Maka, nilai hampir bagi $\sqrt{4.02}$ ialah 2.005.

Peratus perubahan dalam x	Peratus perubahan dalam y
$\frac{\delta x}{x} \times 100 = \frac{4.02 - 4}{4} \times 100$ $= \frac{0.02}{4} \times 100$ $= 0.5\%$	$\frac{\delta y}{y} \times 100 = \frac{2.005 - 2}{2} \times 100$ $= \frac{0.005}{2} \times 100$ $= 0.25\%$

Jika x berubah daripada x kepada $x + \delta x$, maka

- Peratus perubahan dalam $x = \frac{\delta x}{x} \times 100\%$
- Peratus perubahan dalam $y = \frac{\delta y}{y} \times 100\%$

Contoh 24

Diberi $y = 2x^2 - 3x + 4$. Apabila $x = 2$, terdapat perubahan kecil dalam x sebanyak 3%. Dengan menggunakan konsep kalkulus, cari peratus perubahan dalam y yang sepadan.

Penyelesaian

Diberi $y = 2x^2 - 3x + 4$

Apabila $x = 2$, $y = 2(2)^2 - 3(2) + 4$

$$= 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 3$$

$$= 4(2) - 3$$

$$= 5$$

dan $\delta x = \frac{3}{100} \times 2$

$$= 0.06$$

Jadi, $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$

$$= 5 \times 0.06$$

$$= 0.3$$

$$\frac{\delta y}{y} \times 100 = \frac{0.3}{6} \times 100$$

$$= 5$$

Maka, peratus perubahan dalam y yang sepadan ialah 5%.

Latihan Kendiri 2.14

1. Bagi setiap fungsi berikut, cari perubahan kecil dalam y yang sepadan dengan perubahan kecil dalam x yang diberi.

(a) $y = 4x^3 - 3x^2$, apabila x menokok daripada 1 kepada 1.05.

(b) $y = 4\sqrt{x} + 3x^2$, apabila x menyusut daripada 4 kepada 3.98.

2. Bagi setiap fungsi berikut, cari perubahan kecil dalam x yang sepadan dengan perubahan kecil dalam y yang diberi.

(a) $y = 2x^{\frac{3}{2}}$, apabila y menyusut daripada 16 kepada 15.7.

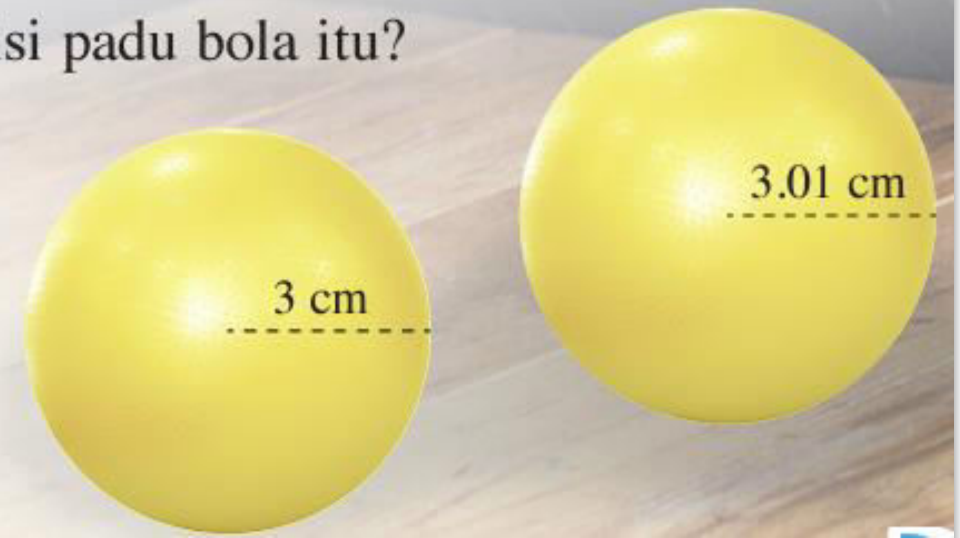
(b) $y = \dfrac{x + 2}{2}$, apabila y menokok daripada 2 kepada $2 + p$.

3. Diberi $y = \dfrac{16}{x^2}$ cari nilai $\dfrac{dy}{dx}$ apabila $x = 2$ dan seterusnya tentukan nilai hampir bagi $\dfrac{16}{2.02^2}$

4. Jika $y = x^{\frac{5}{4}}$, cari peratus perubahan hampir dalam x apabila terdapat 4% perubahan dalam y.

Sebiji bola yang berbentuk sfera dengan jejari 3 cm dipamkan udara ke dalamnya. Jejari bola itu berubah sedikit daripada 3 cm kepada 3.01 cm. Bolehkah anda tentukan perubahan kecil dalam jejari bola itu? Bagaimanakah pula dengan perubahan kecil dalam isi padu bola itu?

Masalah yang melibatkan perubahan kecil seperti ini boleh diselesaikan dengan menggunakan rumus penghampiran yang telah dipelajari sebelum ini, iaitu $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$.



Menyelesaikan masalah yang melibatkan perubahan kecil dan penghampiran suatu kuantiti

Contoh 25 APLIKASI MATEMATIK

Cari perubahan kecil dalam isi padu, I cm^3, sebiji bola kaca yang berbentuk sfera apabila jejarinya, j cm, bertambah daripada 3 cm kepada 3.02 cm.

Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Jejari, j sebiji bola kaca berubah daripada 3 cm kepada 3.02 cm.
- Cari perubahan kecil dalam isi padu, I bola kaca itu.

2 . Merancang strategi

- Cari nilai bagi $\frac{dI}{dj}$ apabila $j = 3$ cm.
- Gunakan rumus $\delta I \approx \frac{dI}{dj} \times \delta j$.

4 . Membuat refleksi

Apabila $j = 3$ cm,

$$I = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$
$$I = 113.0973 \text{ cm}^3$$

Apabila $j = 3.02$ cm,

$$I = \frac{4}{3}\pi(3.02)^3$$
$$I = 115.3744 \text{ cm}^3$$

Perubahan isi padu bola kaca
$= 115.3744 - 113.0973$
$= 2.277$

Maka, perubahan isi padu bola kaca itu ialah 2.277 cm^3.

3 . Melaksanakan strategi

Katakan I cm^3 dan j cm masing-masing ialah isi padu dan jejari bola kaca itu.

Jadi, $I = \frac{4}{3}\pi j^3$

$$\frac{dI}{dj} = 4\pi j^2$$

Apabila $j = 3$, $\delta j = 3.02 - 3$
$= 0.02$

dan $\frac{dI}{dj} = 4\pi(3)^2$
$= 36\pi$

Oleh itu, $\delta I \approx \frac{dI}{dj} \times \delta j$
$= 36\pi \times 0.02$
$\delta I = 2.262$

Maka, perubahan kecil dalam isi padu bola kaca itu ialah 2.262 cm^3.

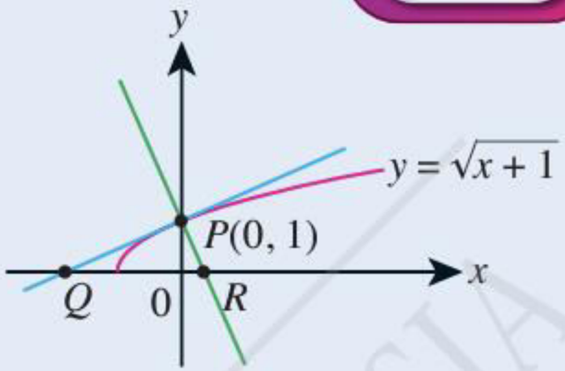
Latihan Kendiri 2.15

1. Tempoh ayunan, T saat, bagi suatu bandul dengan panjang l cm diberi oleh $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$. Cari perubahan hampir dalam T apabila l menokok daripada 9 cm kepada 9.05 cm.
2. Luas tompokan minyak yang berbentuk bulatan bertambah dari 4π cm^2 kepada 4.01π cm^2. Cari perubahan kecil yang sepadan dalam jejari tompokan minyak itu.
3. Panjang sisi sebuah kubus ialah x cm. Cari perubahan kecil dalam isi padu kubus itu apabila setiap sisinya menyusut daripada 2 cm kepada 1.99 cm.
4. Cari perubahan kecil dalam isi padu sebuah sfera apabila jejarinya menyusut daripada 5 cm kepada 4.98 cm.

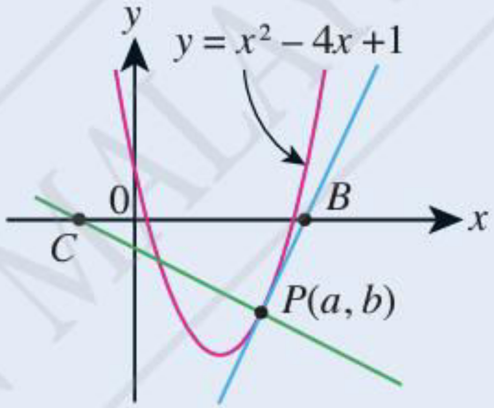
Latihan Formatif 2.4

Kuiz bit.ly/2PbDTre

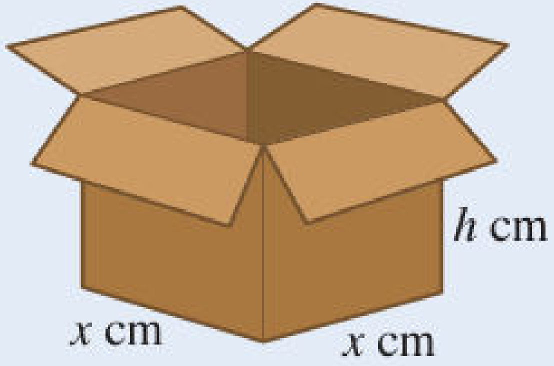
1. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = \sqrt{x + 1}$. Tangen dan normal kepada lengkung itu pada titik $P(0, 1)$ masing-masing menyilang paksi-x di Q dan R. Cari
   (a) persamaan tangen dan koordinat Q,
   (b) persamaan normal dan koordinat R,
   (c) luas, dalam unit², segi tiga PQR.



2. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = x^2 - 4x + 1$ dengan garis tangen dan normal pada titik $P(a, b)$. Garis tangen itu berserenjang dengan garis $2y = 4 - x$ dan bertemu paksi-x di B. Garis normal pula bertemu paksi-x di C. Cari
   (a) nilai a dan nilai b,
   (b) persamaan tangen pada titik P dan koordinat B,
   (c) persamaan normal pada titik P dan koordinat C,
   (d) luas, dalam unit², segi tiga BPC.



3. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kotak terbuka dengan tapak berbentuk segi empat sama bersisi x cm dan tinggi h cm. Kotak itu diperbuat daripada kepingan kadbod dengan luas 75 cm^2.



(a) Tunjukkan bahawa isi padu kotak, V cm^3, diberi oleh

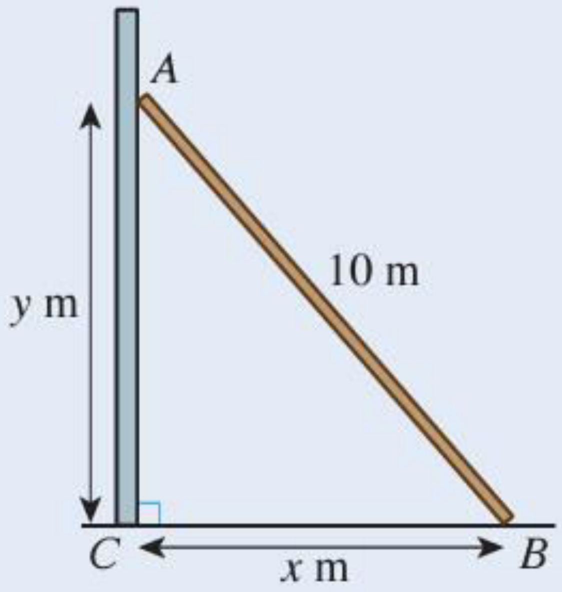
$$V = \frac{1}{4}(75x - x^3).$$

(b) Cari nilai x dengan keadaan V adalah maksimum dan juga isi padu maksimum kotak itu.

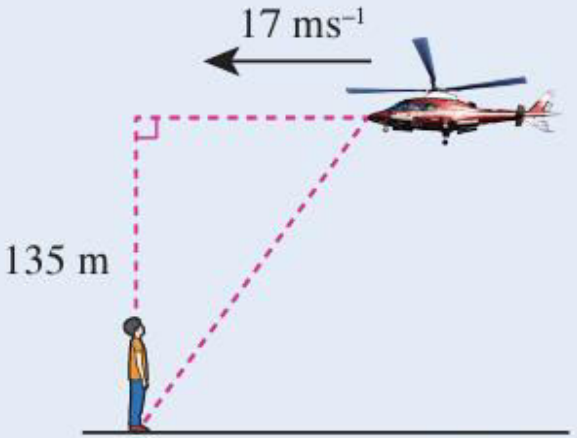
4. Rajah di sebelah menunjukkan sebatang kayu AB dengan panjang 10 m disandarkan pada dinding sebuah bangunan. Hujung kayu A ialah y m dari atas lantai dan hujung kayu B pula ialah x m dari kaki dinding C. Cari

(a) kadar perubahan hujung kayu A jika hujung kayu B menggelongsor menjauhi dinding pada kadar 3 ms^{-1} apabila $x = 8$ m,

(b) kadar perubahan hujung kayu B jika hujung kayu A menggelongsor ke bawah pada kadar 2 ms^{-1} apabila $y = 6$ m.



5. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah helikopter yang berada pada ketinggian 135 m dari permukaan tanah. Helikopter itu bergerak secara mengufuk ke arah budak lelaki dengan kadar 17 ms^{-1}. Cari kadar perubahan jarak antara helikopter dengan budak lelaki itu apabila jarak mengufuk antara helikopter dengan budak lelaki itu ialah 72 m.



TAMAT